

# DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑOS DE LOS TNOs

## SIZE DISTRIBUTION OF MULTIKILOMETER TRANSNEPTUNIAN OBJECTS

Paper de Petit et al. (2008) (libro TNOs pg. 71)

Hay dos motivos principales para estudiar la distribución de tamaños de los TNOs:

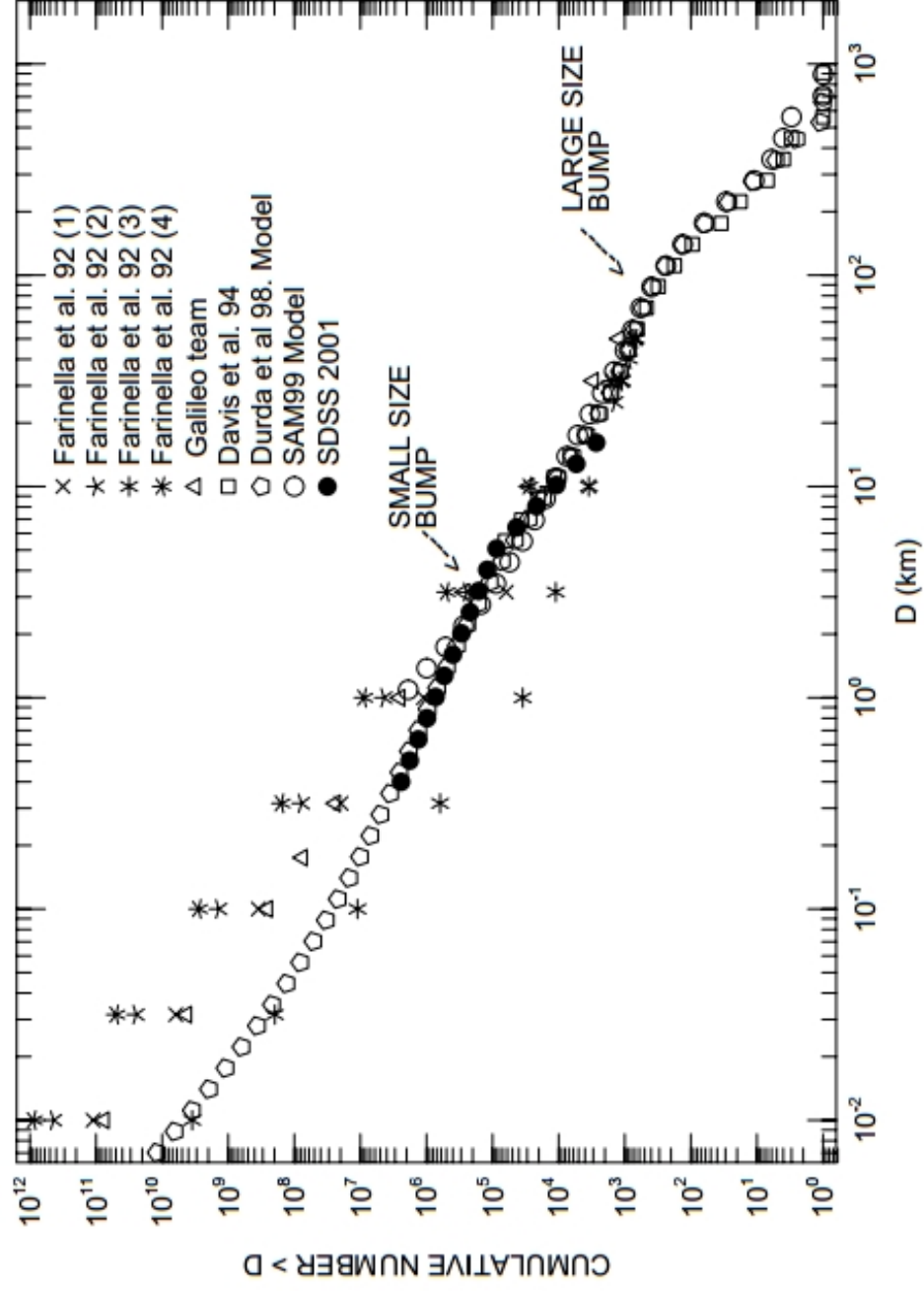
- Determinar la masa de la región TN
- Entender la acción y competencia entre la erosión por acreción y por colisiones.

Los cuerpos grandes son casi inmunes a la fragmentación por colisiones a lo largo de la edad del SS y su distribución de tamaños está controlada por procesos de acreción.

Los cuerpos menores de 50 – 100 km, (Gonzalo dice 200 km) de diámetro han sufrido una fuerte evolución colisional y su distribución de tamaños actual está conectada a sus propiedades físicas y ambiente colisional. Es decir que es el resultado de la evolución colisional.

La distribución de tamaños del cinturón de asteroides se estima decentemente por leyes de potencias para ciertos rangos de tamaños.

COMPARISON OF ASTEROID SIZE DISTRIBUTION: OBSERVATIONS AND MODELS



Suponiendo que esto vale también para TNOs se usa la pendiente de la distribución de magnitudes aparentes para estimar la pendiente de la distribución de tamaños y finalmente estimar la masa de la región integrando la ley de potencias hasta un cierto límite.

La determinación precisa del tamaño de un objeto requiere :

- O bien resolver el objeto en el óptico. Solo existen 3 TNOs grandes resueltos: Plutón, Quaoar y Eris (con el HST).
- O bien obtener observaciones tanto ópticas como infrarrojas para usar modelos térmicos para estimar el diámetro (ver paper de Stansberry et al. 2008 (libro)). Solo los TNOs grandes cercanos tienen estimaciones del Diámetro de sus emisiones IR.

---

El brillo en el visible es proporcional al producto del albedo geométrico y el area visible del objeto.

El brillo en el IR térmico es proporcional al area y también es función de la temperatura de la superficie, la cual depende del albedo.

Por lo tanto, se pueden combinar observaciones en el Visible y en el IR para resolver conjuntamente el tamaño y el albedo del objeto.

Entonces se resuelve un sistema de 2 ec. (una para el flujo en V y otra para el flujo en IR) y se considera un modelo para la distribución de la temperatura de la superficie.

---

La función de luminosidad da el número acumulado o incremental de TNOs más brillante que una magnitud aparente y está dada por:

$$\Sigma(m) = 10^{\alpha(m-m_0)} \quad (1)$$

donde  $\alpha$  es la pendiente y  $m_0$  la magnitud a la cual se espera 1 objeto por grado cuadrado del cielo.

La determinación de la distribución de magnitudes requiere un número razonable de TNOs descubiertos por un survey de área conocida y sensibilidad.

Los surveys se podrían dividir en aquellos de gran área y de pequeña área.

## Surveys de TNOs de gran area

Los surveys de gran escala cubren típicamente desde varios grados cuadrados hasta miles, alcanzando una magnitud límite (en el rojo) de 24.

El objetivo es detectar un gran número de objetos.

Como vimos, estos surveys tienen una variedad de biases lo cual hace compleja la interpretación de los mismos.

## Surveys de TNOs de area pequeña y profundos

Los surveys profundos cubren solo una fracción de grado cuadrado del cielo y alcanzan magnitudes R más débiles que 24.5. Apuntan a descubrir objetos débiles (pequeños).

## DETERMINACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑOS

Hasta el presente se han usado dos métodos para determinar la distribución de tamaños:

- El primero depende de la determinación de la función de luminosidad (LF). Esto es directo, accesible y no requiere casi modelo.

Con la LF, fijando el albedo se puede obtener la distribución de tamaños de la relación entre magnitudes y tamaños (vista en la clase3).

Si la LF es una ley de potencias como la ec. (1), entonces la distribución diferencial de tamaños estará dada por:

$$N(R) = CR^{-q}, \quad (2)$$

donde  $q = 5\alpha + 1$ .

- Para el segundo se modela la distribución de tamaños y se compara con lo observado. Por ejemplo Jewit y Lu (1995) usan un modelo simple de EKB, asumiendo una ley de potencias para la distribución de tamaños y de distancias heliocéntricas y estiman el valor límite de  $q$  comparando las detecciones esperadas con las reales.

La distribución de tamaños permite además de estimar la masa de la región, estimar la existencia de un límite externo del cinturón o los cuerpos más grandes que uno debiera esperar.



## DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑOS VS DISTRIBUCIÓN DE MAGNITUDES APARENTES

### - Conversión de Magnitud a Tamaño

Existen varios factores a tener en cuenta para convertir magnitud aparente a tamaño.

La magnitud aparente de un TNO puede representarse por:

$$m = m_{Sol} + 2.5 \log \left( \frac{2.25 \times 10^{16} R^2 \Lambda^2}{\nu r^2 \Phi(\gamma) f(t)} \right) \quad (3)$$

donde  $r$  = radio del objeto,  $R$  y  $\Lambda$  son las distancias heliocéntricas y geocéntricas (en UA)  $\nu$  es el albedo,  $\gamma$  es el ángulo de fase,  $\Phi(\gamma)$  es la función de fase y  $f(t)$  es la función de curva de luz rotacional. La curva de luz se debe a la rotación del objeto y también a la forma elongada características orbitales y variaciones de albedo.

$f(t)$  es típicamente una función periódica del tiempo con un período corto (hs) y una amplitud moderada con valor medio igual a 1. Probablemente las amplitudes sean mayores para TNOs más chicos (como se observa en asteroides), posiblemente debido a los apartamientos de la esfericidad de los objetos más chicos.

Pero las amplitudes típicas son del orden de las incertezas en las magnitudes.

Para determinar la distribución de tamaños a partir de la magnitud observada, primero hay que calcular la magnitud absoluta, lo cual es equivalente a remover los efectos geométricos ( $R$ ,  $\Lambda$  y  $\gamma$ ).

$$H = m_{Sol} + 2.5 \log \left( \frac{2.25 \times 10^{16}}{\nu r^2} \right) \quad (4)$$

Las distancias heliocéntricas y geocéntricas son bien determinadas incluso con un arco de obs de 1 día, entonces este cálculo no produce casi error.

Para determinar  $f(t)$  se requieren muchas más observaciones, al menos un período rotacional. Pero estas observaciones son imprácticas para los surveys, por tanto este efecto es en general omitido o modelado por una función periódica simple.

Otro fenómeno a tener en cuenta es el de la fase. Se necesita conocer  $\Phi(\alpha)$ . Se usan fórmulas empíricas desarrolladas para asteroides. Esto tiende a subestimar la magnitud a  $\Phi = 0$  en 0.1 a 0.2 magnitudes.

El último parámetro que se necesita es el albedo geométrico. Este se puede determinar a

partir del brillo en el visible y en el IR y usar un modelo térmico del objeto. Con esto sale el tamaño y el albedo.

Dadas todas las dificultades anteriores, no todos los autores convierten las magnitudes aparentes a tamaños y en los papers dan solo la LF. Los que convierten usan muchas suposiciones.

### - Los límites de las distribuciones como leyes de potencias

En general para las distribuciones de tamaños (ZD) a partir de los surveys usan leyes de potencias.

Otra posibilidad sería combinar funciones para las diferentes partes del modelo, lo cual puede hacerse combinando leyes de potencia para la ZD.

El uso de leyes de potencia para pequeños cuerpos se ha debido principalmente al trabajo de Dohnanyi (1969) que mostró que en un proceso colisional se alcanza una distribución casi estacionaria.

La distribución final es el producto de una función que decrece con  $t$  muy lento y una ley

de potencia de índice 11/6 para la masa, es decir 7/2 para la ZD diferencial.

Sin embargo, el proceso de fragmentación es al azar en la naturaleza, es decir es algo disperso con alguna clase de tendencia.

Por ejemplo, la LF observada del cinturón de asteroides tiene una estructura de onda su-  
perpuesta a una tendencia de ley de potencia.

Para tamaños pequeños, sobreviene un problema dependiendo del valor del índice  $q$ . La  
masa de los objetos con radio  $r_{min} < r < r_{max}$  es:

$$M(r_{min}, r_{max}) = \int_{r_{min}}^{r_{max}} n(r)M(r)dr = \frac{4\pi\rho_v A}{3(4-q)} [r_{max}^{4-q} - r_{min}^{4-q}] \quad (5)$$

donde vemos que tiene que ser  $q \neq 4$ . Si  $q > 4$  la masa total diverge para tamaños pequeños.

La mayoría de los surveys encuentran un valor de  $q \sim 4$  o levemente mayor.

Entonces tiene que haber un límite de  $r$  pequeño, más allá del cual el valor de  $q$  sea menor.  
Además, para tamaños pequeños, se espera un índice  $q = 3.5$ , ya que se supone que se ha  
alcanzado el equilibrio colisional.

Bernstein et al. (2004) realizan un survey con el HST (0.019 grados cuadrados y  $m_R = 28.5$ ) encuentra 3 objetos pequeños y ven que no se puede ajustar una sola ley de potencias a la LF, lo cual atribuye al esperado cambio de forma de la ZD.

Modela este cambio usando una ley exponencial rolling" (ondulada?):

$$\Sigma(m) = \Sigma_{23} 10^{\alpha(m-23) + \alpha'(m-23)^2} \quad (6)$$

con  $\Sigma_{23}$  la densidad de objetos de magnitud 23.

También investiga un ajuste exponencial doble dado por:

$$\Sigma(m) = (1 + c) \Sigma_{23} [10^{-\alpha_1(m-23)} + c 10^{-\alpha_2(m-23)^2}] - 1 \quad (7)$$

donde  $c \equiv 10^{(\alpha_2 - \alpha_1)(m_{eq} - 23)}$ .

El comportamiento asimtótico es una exponencial de índice  $\alpha_1$  hacia el final del espectro de tamaños y  $\alpha_2$  hacia el otro extremo, igualándose (la contribución) en  $m_{eq}$ .

EL uso de esta ecuación tiene en cuenta un albedo un único albedo para todos los objetos. Hay trabajos que usan albedos dependientes del tamaño, pero esta relación no es clara.

## DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑOS ACTUAL ESTIMADA DE VARIOS SURVEYS

Las primeras estimaciones de la LF o ZS estaban basadas en muestras de algunos a decenas de objetos y esto puede llevar a conclusiones falsas.

Los trabajos siguientes fueron “empinando” más la pendiente de la ZD. En particular el trabajo de Bernstein et al. 2004 modela la LF como combinación de 2 funciones exponenciales. Usa sus descubrimientos + todos los surveys previos juntos.

Basándose en este ajuste combinado, determinan que la pendiente del límite brillante es en realidad más empinada que los trabajos previos ( $\alpha \sim 0.8$ ), y en magnitudes  $m \sim 24$  la LF comienza a estar dominada por un índice menor de  $\alpha \sim 0.3$ .

Como la LF no es una exponencial simple, no hay una conexión directa completa entre  $\alpha$  y  $q$ . Sin embargo, el comportamiento asintótico de la LF implica una ZD de  $q \sim 2.5$ , mucho más chato que el valor de 3.5 predicho por Donanyhi.



Se puede concluir de los trabajos publicados que la ZD total de los TNOs tiene un índice  $q \sim 4.5$  para los más brillantes hasta  $m_R \sim 25$ .

Pero los trabajos sobre acreción de TNOs, asumen una fase de acreción no perturbada que produce una ZD acumulada de pendiente  $q \sim 3$  (siempre menor que 4). Ver paper de Kenyon et al. 2008.

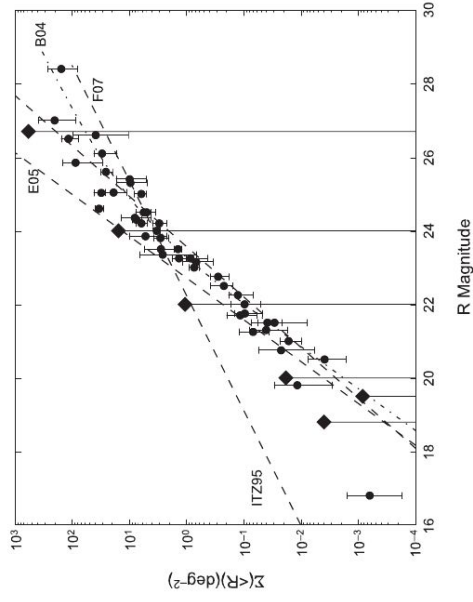


Fig. 1. Cumulative surface density of TNOs brighter than a given R magnitude. The solid circles represent the values derived from the works by T61, JLC96, LJ98, L01, JL95, ITZ95, JLT98, G98, CB99, TLL01, G01, T01, B04, P06, and F07. The error bars correspond to a 68.3% probability. The solid diamonds represent the upper limit at 99.7% probability for non-detection from K89, LJ88, LD90, S00, and G01. The dashed lines show the shallowest (ITZ95), the most recent (F07), and the steepest (E05,  $\alpha = 0.88$ ) LF given in Table 3. The dash-dotted line shows the LF of B04, integrated to give a cumulative density. Note that such a plot should never be used to “best-fit” the LF.

TABLE 3. Luminosity function (LF) and size distributions of past surveys.

Survey	LF slope ( $\alpha$ )	Normalization Constant*	Size Distribution Slope (q)	N(D $\geq$ 100 km)	Comments List of Data Used <sup>†</sup>
<b>Wide-Area Surveys</b>					
JL95		$C_{25} = 6 \pm 2.3$	$q < 3$	$\sim 35,000$	$30 \leq R \leq 50$ AU region T61, K89, LJ88, LD90, JL95 JL95, ITZ95
ITZ95	$0.32^{+0.10}_{-0.08}$ $-0.6$	$C_{25} = 7.9^{+2.9}_{-2.3}$			everything but JL95
JLT98	$0.58 \pm 0.05$	$m_0 = 23.27 \pm 0.11$	$C_{25} = 5.6$ $4.0 \pm 0.5$		T61, K89, LJ88, LD90, JL95, ITZ95 $20 \leq m_R \leq 25$
TJL01	$0.63 \pm 0.06$	$m_0 = 23.04^{+0.8}_{-0.9}$	$4.0^{+0.6}_{-0.5}$		Published data with $m_R > 23$ Maximum likelihood <sup>‡</sup> Own data only
T01	$0.66 \pm 0.06$	$m_0 = 23.32 \pm 0.09$	$4.2^{+0.4}_{-0.3}$	$4.7^{+1.6}_{-1.0} \times 10^4$	TJL01, T01
P06	$0.76 \pm 0.1$	$m_0 = 23.3^{+0.2}_{-0.25}$	$q \approx 4.8$		Own data only
<b>Deep Surveys</b>					
G98	$0.76^{+0.10}_{-0.11}$	$m_0 = 23.4^{+0.20}_{-0.18}$			LJ88, LD90, C95, ITZ95, JLT98, G98
CB99	$0.52 \pm 0.02$	$m_0 = 23.5 \pm 0.06$	$3.6 \pm 0.5$		All surveys and upper limits ITZ95, JLT98, G98, CB99
G01	$0.66 \pm 0.04$		$4.3 \pm 0.5$		LJ88, LD90, C95, ITZ95, JLT98, G98, CB99, G01
	$0.69 \pm 0.07$	$m_0 = 23.5 \pm 0.03$	$q \geq 4$		
B04 <sup>†</sup>	$\alpha_1 = 0.88$ $\alpha_2 = 0.32$	$\Sigma_{23} = 1.08$			$R_{\text{eq}} = 23.6$ CB99, L01, TJL01, G01, ABM02, TB03, B04
F07	$0.6 \pm 0.15$ $0.73 \pm 0.06^{**}$	$m_0 = 23.25 \pm 0.5$ $m_0 = 23.55 \pm 0.15^{**}$	$4.6 \pm 0.3^{**}$		Own data only F07, unpublished data by Kavelaars et al.

\* $C_x$ : number of object brighter than R magnitude x per deg<sup>2</sup>;  $m_0$ : R magnitude at which a cumulative density of 1 object per deg<sup>2</sup> is reached;  $\Sigma_x$ : Number of object per deg<sup>2</sup>, per unit magnitude at R magnitude x.

<sup>†</sup>A reference to A on the line of B means that data acquired in work A are used in work B, not all the data used by A to derive the LF.

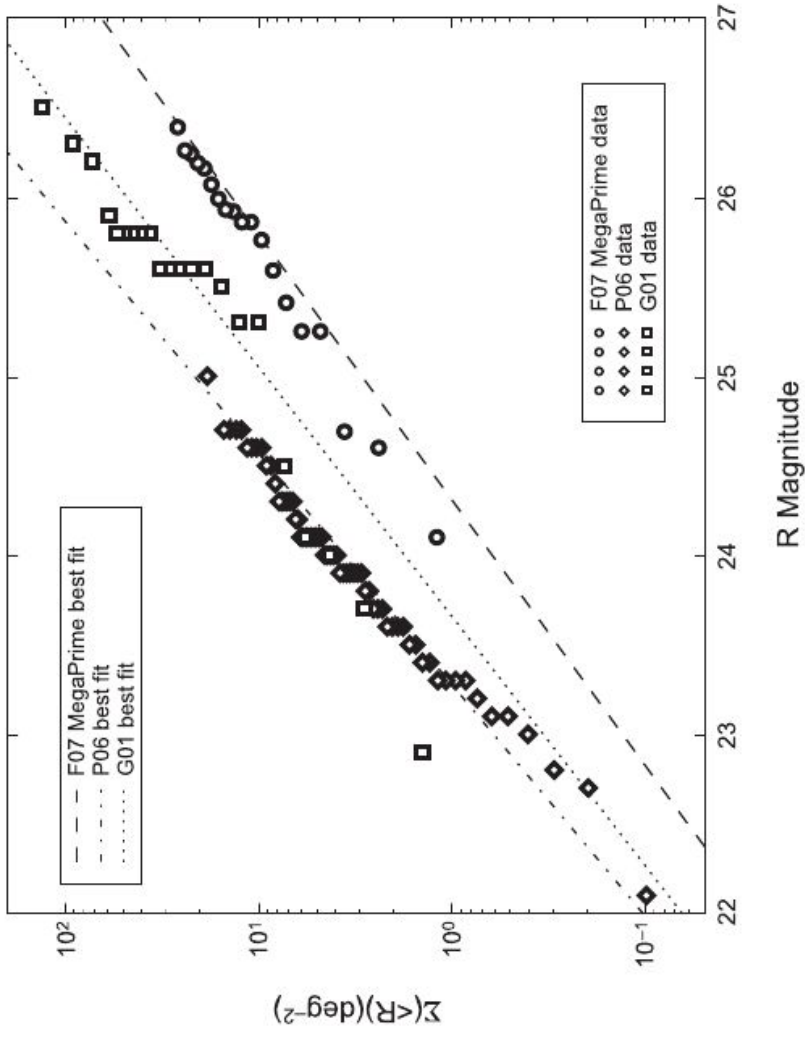
<sup>‡</sup>Two exponentials, break at  $m_0 = 22.4$ , bright end slope = 1.5.

<sup>§</sup>Fitting the differential LF with a frequentist approach,  $\alpha = 0.64^{+0.11}_{-0.10}$  and  $m_0 = 23.23^{+0.15}_{-0.20}$ .

<sup>¶</sup>Double exponential differential LF  $\Sigma(R) = (1 + c)\Sigma_{23}[10^{-\alpha_1(R-23)} + c10^{-\alpha_2(R-23)}]^{-1}$  with  $c = 10^{(\alpha_2 - \alpha_1)(R_{\text{eq}} - 23)}$ .

\*\* $3\sigma$  uncertainties.





**Fig. 2.** Debiased cumulative surface density of TNOs for G01 (open squares), P0 (open diamonds), and MEGAPrime data of F07 (open circles). The data have been debiased using the published efficiency functions. The different lines represent the best-fit single-exponential LF for G01 (dotted line), P06 (dash-dotted line), and F07 (dashed line). All three surveys, taken independently, are well approximated by a single exponential function with index ranging from 0.7 to 0.8. Clearly, one cannot simply combine them as was done up to and including B04 (although CB99 noted that combining leads to inconsistent results). One must account for an offset in surface density due to longitude and latitude variation, magnitude difference in different passband filters, and calibration uncertainties. An attempt to apply these corrections was done by F07, but this requires external determination of these offset in order to avoid unreasonable fit values for  $m_0$  for surveys with small number of detections (F07).

## DISTRIBUCIÓN DE TAMAÑOS DE LAS DIFERENTES POBLACIONES DINÁMICAS

Las diferentes poblaciones dinámicas de la región TN podrían haberse formado por mecanismos diferentes.

Los objetos podrían haber venido de diferentes lugares y haber sufrido una evolución colisional y acrecional diferente y por lo tanto tener diferentes ZD.

Solo los trabajos más recientes abordan este tema, ya que se necesita un gran número de objetos.

Además cada trabajo toma la definición de las clases a su gusto.

El trabajo que más objetos descubrió es el de Ellyo et al. (2005) y es el que mejor puede abordar el estudio de la ZD para diferentes poblaciones.

Ellos encuentran que la pendiente de la LF es:

- Clásicos:  $\alpha = 0.72$  ( $q = 4.6$ )
- Resonantes:  $\alpha = 0.6$  ( $q = 4$ )
- SD:  $\alpha = 1.29$  ( $q = 7.45$ )

y para la muestra completa, es decir todos los TNOs encuentra  $\alpha = 0.88$ , ( $q = 5.4$ ) más empinada que cualquier otro survey.

Pero, hay que tener cuidado, porque Elliot et al. no miden la eficiencia en el instante de descubrimiento y además casi la mitad de los datos que usan no tienen órbitas lo suficientemente precisas.

Las cuestiones más importantes concernientes a la ZD es la ZD de las diferentes clases y determinar el límite de tamaño al cual cambia la pendiente. Esto se podrá abordar o mejorar con los surveys futuros que aumentarán el número de TNOs y llegarán hasta magnitudes más débiles.

## ESTIMACIÓN DEL NÚMERO Y ZD

Parker y Kavelaars (2010a y b) re caracterizan la sensibilidad orbital de varios surveys. Encuentran que estos surveys eran sensibles a poblaciones distantes como SDOs y objetos tipo Sedna.

A partir de estos trabajos y de otros que estiman la pendiente de la ZD Di Sisto y Brunini (2011) calculan la ZD de los SDOs como:

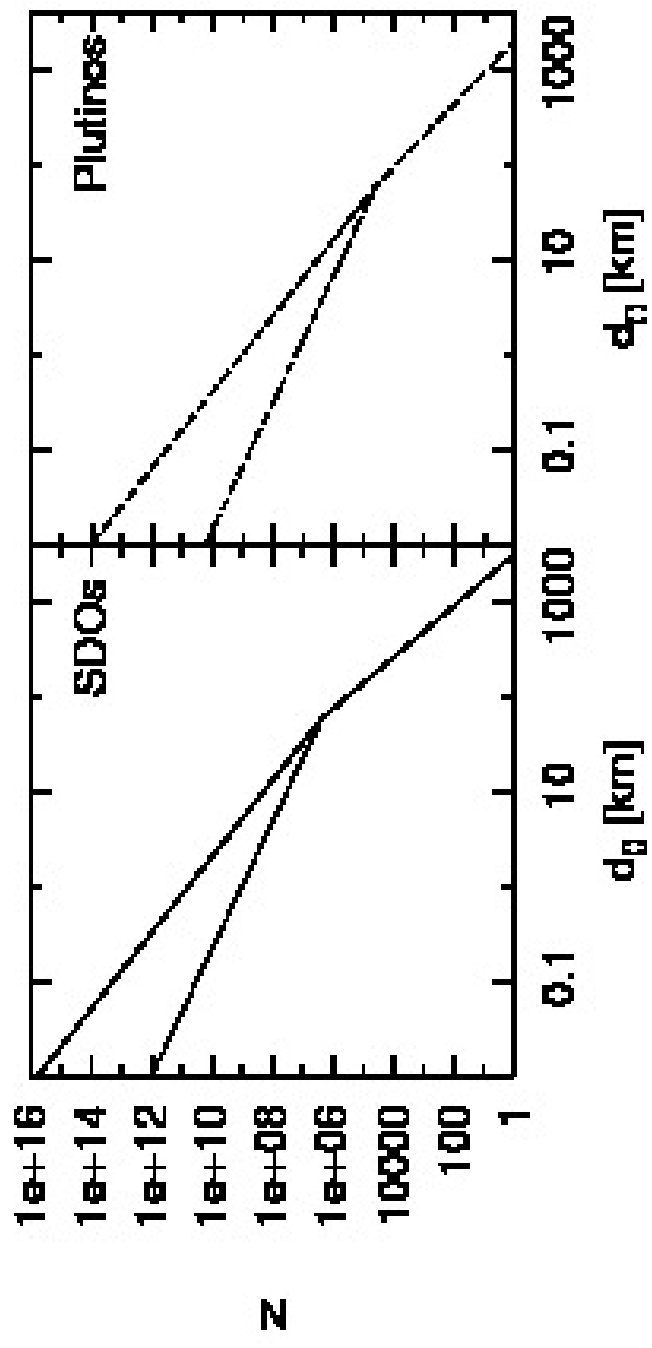
$$N(d > d_0) = C_0 \left(\frac{1}{d}\right)^{s_2-1}, \quad (8)$$

para  $d \leq 60km$ ,

$$N(d > d_0) = 3.5 \times 10^5 \left(\frac{100}{d}\right)^{s_1-1} \quad (9)$$

para  $d > 60km$ ,

donde  $C_0 = 3.5 \times 10^5 100^{s_1-1} (60)^{s_2-s_1}$  by continuity for  $d = 60$  km,  $s_1 = 4.7$ , and  $s_2 = 2.5$  and 3.5.



SHANKMAN ET AL. 2013 UNA “CAIDA” DE LA SD?

A POSSIBLE DIVOT IN THE SIZE DISTRIBUTION OF THE KUIPER BELT SCATTERING OBJECTS

The Astrophysical Journal Letters, 764:L2 (6pp), 2013 February 10

Estudian la distribución de tamaños de los “scattering-objects” analizando el survey CFEPS (Canada France Ecliptic Plane Survey) junto con modelos de sus distribuciones orbitales esperadas.

Llaman SOs: TNOs con perihelios  $q \leq 35$  UA

(ver tabla.)

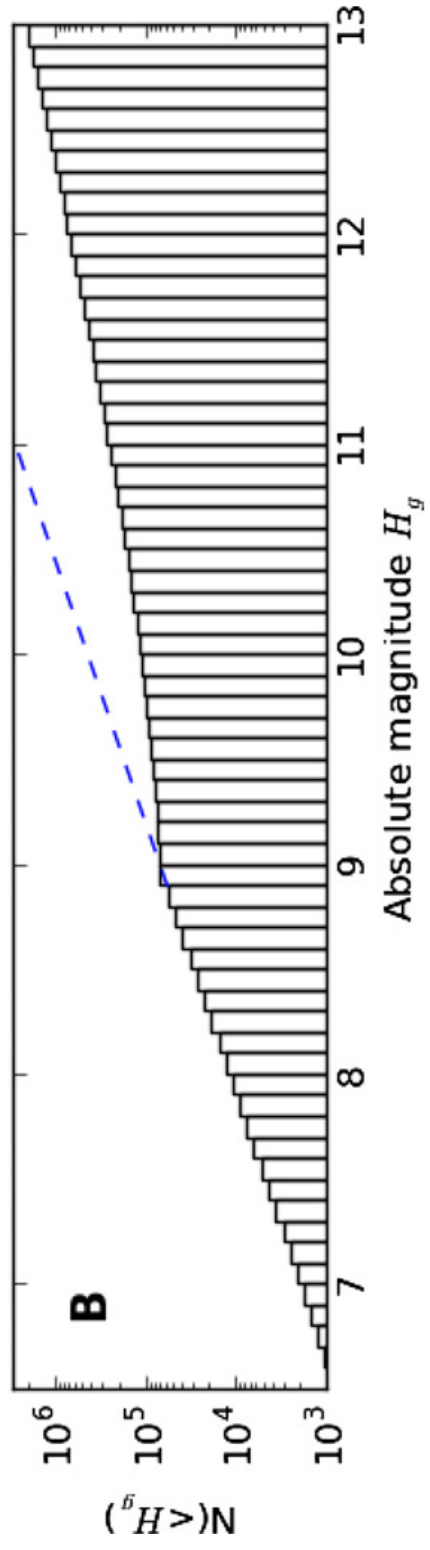
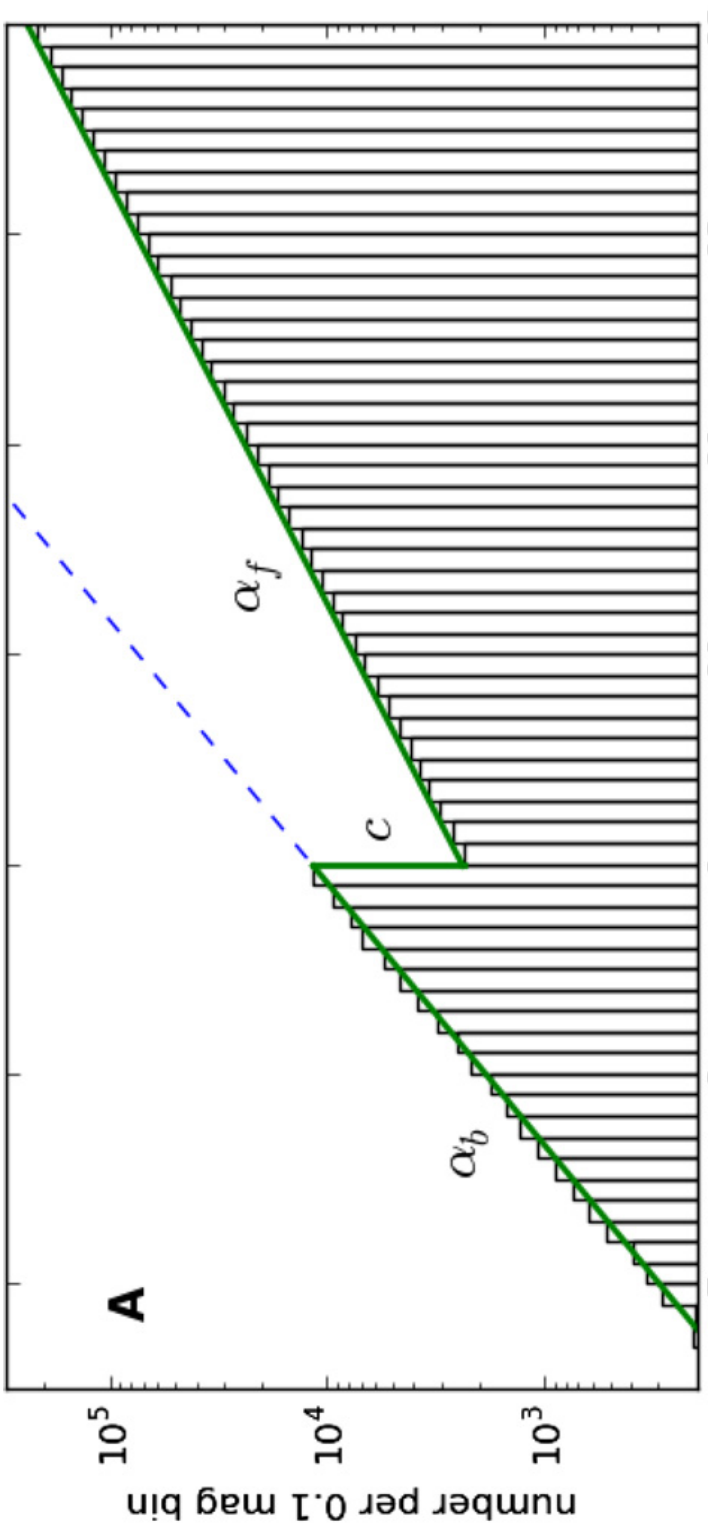
Eligen estos objetos por lo siguiente:

Existe evidencia de un quiebre en la SD de los TNOs hacia objetos más pequeños. Sin embargo, el diámetro límite de este quiebre es complicado de definir debido al bias de magnitud. Si se considera objetos con perihelio cercano, este efecto se reduce.

Exploran los quiebres tradicionales, pero encuentran que su análisis es consistente con un decrecimiento repentino del nro de SOs por debajo de los 100 kms, el cual vuelve luego a crecer como ley de potencia.

Los SOs observados por CFEPS son 9 y utilizan 2 objetos más descubiertos a altas latitudes, es decir un total de 11 objetos.

Entonces la distribución de magnitudes se muestra en la figura





La solución preferencial está dada por los parámetros:

$$\alpha_b = 0.8$$

$$H_g = 9 (D \sim 100) \text{ km}$$

$$c = 6$$

$$\alpha_f = 0.5$$

### **Argumentos externos:**

- Falta de objetos menores de 100 km en los Troyanos de Neptuno
- Survey profundo (Fraser et al. 2010) estima  $\alpha \sim 0.4 \pm 0.15$  para  $30 < D < 38$  km
- Modelos de formación de planetesimales (Johansen et al 2007 y Morbidelli et al. 2009) sugieren que la nebulosa protosolar produjo planetesimales más grandes que cierto diámetro.
- Modelos de evolución colisional (Campo Bagatin y Benavidez, 2012) en el marco del modelo de Niza se ajustan al “divot”.