

Seminario de Postgrado

Título: EL ESPACIO TRANSNEPTUNIANO

1 Introducción general.

1.1 Existencia de un cinturón de cometas más allá de Neptuno.

La idea de la existencia de un planeta masivo más allá de Neptuno data de más de 1 siglo atrás cuando se argumentaba que Neptuno solo no podía explicar las irregularidades del movimiento de Urano. En 1908 el Astrónomo norteamericano W. Pickering sugirió la existencia de un planeta transneptuniano con una masa de 2 veces la de la Tierra. Percival Lowell (aficionado a la astronomía muy adinerado) buscó de manera exhaustiva lo que el llamó el planeta "X" entre 1905 y 1916. Hacia finales de los vientes, el observatorio Lowell, Arizona, retomó la búsqueda del "Planeta X" iniciada algunas décadas antes por su fundador Percival Lowell. En 1929 el entonces director, Vesto Melvin Slipher decidió dedicar al proyecto un telescopio de trece pulgadas (33 cm) y contrató a Clyde Tombaugh, un joven de veintidos años, para fotografiar el cielo en búsqueda del "Planeta X". Placas fotográficas de una misma región del cielo tomadas en distintas noches debían ser comparadas con el propósito de encontrar algún "objeto errante" (o sea un planeta) que se moviera entre las estrellas. El 18 de febrero de 1930, Clyde Tombaugh notó que un objeto de magnitud 17 se había movido en placas tomadas de la región de Delta Geminorum en distintas épocas, justo como era de esperarse para un planeta transneptuniano. El 13 de marzo del mismo año, día del 149 aniversario del descubrimiento de Urano, el observatorio de Lowell anunció el descubrimiento del noveno planeta, llamado Plutón, como el dios romano de los infiernos y los muertos, hermano de Jpiter y de Neptuno. Las dos primeras letras de Plutón coinciden también con las iniciales de Percival Lowell.

Sin embargo, el Observatorio Lowell no daba información cuantitativa del descubrimiento, y la confirmación de que el nuevo objeto estaba más allá de Neptuno provino de los cálculos de órbita de Bower y Whipple, graduados de la Universidad de California en Berkeley y miembros de lo que luego fue la escuela para el cálculo de órbitas. Ellos mostraron que el nuevo objeto se encontraba a 41 UA de la Tierra en una órbita inclinada 17 grados, a partir de observaciones F.W.Meyer tomadas durante tres semanas en el Observatorio de Lick y medidas por Van Biesbroeck.

Tombaugh continuó la búsqueda de otros objetos transneptunianos 13 años más sin éxito. Inmediatamente luego del descubrimiento de Plutón, Leonard (1930) especuló que Plutón era el primero de un grupo de objetos aun no descubiertos que llamó planetas “ultra-Neptunianos” y “ultra-Plutonianos”.

. . . Now that a body of the evident dimensions and mass of Pluto has been revealed, is there any reason to suppose that there are not other, probably similarly constituted, members revolving around the Sun outside the orbit of Neptune? . . . As a matter of fact, astronomers have recognized for more than a century that this system is composed successively of the families of the terrestrial planets, the minor planets, and the giant planets. Is it not likely that in Pluto there has come to light the first of a series of ultra-Neptunian bodies, the remaining members of which still await discovery but which are destined eventually to be detected?

Unos años después el astrónomo irlandés Kenneth Essex Edgeworth (1880 - 1972), presentó el primer marco cuantitativo para un cinturón transneptuniano basado en principios cosmogónicos en un tratado que ha permanecido sin publicar (Edgeworth, 1938, *The Evolution of the Solar System*). Edgeworth tomó la idea desarrolló la idea (que data de al menos Kant (1755)) de que la formación de los planetas podía entenderse como la consecuencia de la acumulación de numerosos cuerpos pequeños o condensaciones en un disco protoplanetario que se extendía más allá de las órbitas planetarias conocidas. Siguiendo la idea cosmogónica de Kant, Edgeworth notó que debido a la densidad decreciente de la nebulosa y a las menores velocidades de las condensaciones en la región más allá de Neptuno, la tasa de crecimiento de objetos individuales decrece rápidamente a medida que crece la distancia heliocéntrica. Entonces, mientras que en la región planetaria las inestabili-

dades gravitatorias permitieron la formación de los planetas gigantes, en la zona transneptuniana las densidades eran tan bajas que no permitían la formación planetaria. En las partes externas las partículas no se mueven más en sendas regulares y el movimiento se hace turbulento, apareciendo en el fluido de materia particular un gran número de remolinos independientes que se contraerían en cometas. Estos cometas estarían distribuidos en una región entre 70 y 200 a 300 UA. Para una masa total de un tercio de la masa terrestre estimó que alrededor de 200 millones de cometas de masas promedio de 2×10^{-9} masas terrestres se formaron de esta manera, y si la masa total fue de 0.1 masa terrestre el resultado sería de 2000 millones de cometas de masas promedio de 5×10^{-11} masas terrestres. Luego en dos publicaciones Edgeworth conjeturó la idea que este reservorio más allá de Neptuno era la fuente de los cometas observados (Edgeworth 1943, 1949).

Además concluye que Neptuno representa el caso límite para la formación de un planeta simple en el sistema solar exterior. Aunque hay una masa considerable en la región transneptuniana, sería imposible formar un planeta simple grande ahí. El estatus de Plutón parece alternar entre un planeta y un satélite escapado de Neptuno. Sobre Plutón el escribió:

Pluto, the latest addition to our list of members of the solar system, is too small to be classed as a major planet, in spite of its position; it has been suggested that it is an escaped satellite of Neptunes and we shall find in due course that there are good reasons for placing it in that category (Edgeworth, 1938). Luego en su libro de 1961, lo rankea a veces entre los planetas.

En el paper del 49 Edgeworth analiza y relee las ideas y teorías existentes sobre la formación y evolución del sistema solar. Estudia el tema de la nebulosa solar, cómo era el material. Toma la idea de Laplace de que el material que ahora formó los planetas y los satélites existió en forma de un fluido inmenso. Y el único mecanismo capaz de crear la regularidad es la fricción fluida. El término fluido incluye una nube de pequeñas partículas sólidas tanto como gaseosas. La teoría nebular, asociada con el nombre de postulados de Laplace, dice que el Sol y los planetas se condensaron a partir de la misma nube de gas rotante. Analiza el tema del momento angular. Además, dice que parece no razonable que el disco rotante original tenga un corte abrupto más allá de la órbita de Neptuno y que debe haber un decrecimiento paulatino. No hay evidencia de la opacidad del material, excepto que fue insuficiente para formar planetas. Es razonable suponer que esta región esté ahora ocupada por un número grande de pequeños cúmulos, es decir un

vasto reservorio de potenciales cometas. Cuando uno de estos cúmulos es desplazado de su lugar entra en las regiones interiores del sistema solar y se hace un cometa visible.

Independientemente el astrónomo Germano-Americano Gerard P. Kuiper (1905-1973), argumentó que planetesimales de hielo que se formaron más allá de Neptuno no podrían crecer hasta ser cuerpos masivos debido a las grandes escalas de tiempo colisional a esas distancias. Consecuentemente, los planetesimales transneptunianos habrían permanecido sin acretarse en un anillo entre 38 y 50 UA (Kuiper, 1951). Luego Plutón que recorre la zona entre 30 y 50 UA, comienza el scattering de los cometas por el Sistema Solar. Hace que las órbitas inicialmente circulares se hagan elípticas y entonces luego las perturbaciones más fuertes por Neptuno y los otros planetas gigantes los dispersen aún más. Una cierta fracción de los cometas es dispersada hacia la región de valores muy pequeños de a^{-1} hacia las regiones externas de la “esfera de acción del Sol” (ahora conocida como Nube de Oort). Luego, las perturbaciones estelares redistribuyen los elementos orbitales ahí haciendo el movimiento alrededor del Sol con orientaciones al azar. Esto difiere de la idea de Oort solo en la región de origen de los cometas. Oort supone que se formaron en la región del Cinturón de Asteroides. Además dice que la composición de los cometas indica que son condensaciones a muy baja temperatura, alrededor de 10° K, consistente con la región de origen propuesta (TNR). En el review de Davies et al (2008), dicen que El trabajo de Kuiper, resuena a la idea de Whipple (Whipple, 1950 a y b) sobre los núcleos cometarios como conglomerados de hielo, aunque fue desarrollado aparentemente en forma independiente.

Whipple (1964), trató de estimar la masa del cinturón transneptuniano suponiendo que este era la causa de las aparentes irregularidades de Neptuno, y encontró que un anillo de material de 10 a $20 M_T$ a una distancia de 40 a 50 UA era una solución posible. Calculó que aun con una masa de $100 M_T$, el brillo superficial de este disco sería indetectable con respecto a la luz zodiacal. También remarcó que con una magnitud aparente de 22, un cuerpo individual, de 100 km, sería indetectable con el instrumental de la época.

Más tarde Standish (1993) demostró que tales irregularidades no eran reales, por lo que los resultados de Whipple eran espurios. Se trató de determinar la masa por otros caminos, como por ej. analizando el movimiento del Halley cuyo afelio yace cerca de Neptuno. Pero, los cálculos caban un

cinturón de unas $0.5 M_T$ a 40 UA o de $1.3 M_T$ a 50 UA.

Luego tratando de medir la radiación IR producida por una distribución de cometas y luego producida por el polvo producido por las colisiones de los cometas en el cinturón. Pero no se pudo medir, la radiación térmica del polvo transneptuniano queda por debajo del nivel de ruido de la luz zodiacal. Incluso el IRAS (Infrared Astronomical Satellite) no pudo detectar el disco transneptuniano, pero si detectó discos de polvo circumestelares en algunas estrellas cercanas. Como tales discos son inestables en escalas de tiempo comparadas con las edades de las estrellas centrales, Weissman (1984) propuso que deben estar mantenidos por las colisiones de cuerpos del tamaño de cometas.

La idea de Edgeworth y Kuiper permaneció sin explorar y se consideraba que los JFC eran capturados por Júpiter de la Nube de Oort. Hasta que en 1980, Fernández da la primera explicación sobre la región transneptuniana como fuente de los JFC. A continuación se resume el trabajo de Fernández, 1980.

1.1.1 Paper, Fernández (1980): On the existence of a comet belt beyond Neptune.

Este trabajo surgió para explicar el origen de los cometas de corto período o JFCs. Durante mucho tiempo (100 años o más) el origen de los JFCs fue considerado y estudiado teóricamente sobre la base de la captura de cometas a partir de un flujo casi parabólico (Everhard, 1972, Joss, 1973, etc).

En 1980, Fernández analiza el hecho de que el origen de los JFC como un proceso de captura por Júpiter y los otros planetas gigantes de una población de cometas casi parabólicos en la Nube de Oort, implicaría la pérdida de 300 cometas casi parabólicos por cada uno capturado en órbita de JFC. Entonces el número total de cometas eyectados durante la edad del sistema Solar sería 1.35×10^{12} , alrededor de 1 orden de magnitud más grande que los cometas de la Nube de Oort estimado por Oort (1950). Este cálculo llevó a Fernández a proponer al cinturón transneptuniano entre ~ 35 y 50 UA (sugerido por Edgeworth y Kuiper) como una fuente alternativa más eficiente de JFC.

Formación de cometesimales en la Nebulosa Solar temprana más

allá de Neptuno

La distribución de material en la nebulosa solar temprana puede obtenerse suponiendo que la materia sólida que contenía está actualmente en los planetas. Entonces dispersando el material sólido de los planetas en un disco ecuatorial, se puede obtener la densidad superficial a la distancia de cada planeta. Seguramente los valores reales sean mayores, debido a la eyección de material durante la formación planetaria. Los valores de la densidad superficial de la nebulosa solar se ajustan bien por la relación:

$$\sigma = \sigma_0/r^2 \quad (1)$$

donde $\sigma_0 = 4M_\oplus$ y r es la distancia al Sol.

Se puede suponer que esta ecuación es válida hasta distancias entre 35 y 50 UA. Entonces la masa sólida primordial de esta región será:

$$M_{TNR} = \int_{r_1}^{r_2} \sigma_0/r^2 \times 2\pi r dr = 2\pi\sigma_0 \ln(r_2/r_1) \quad (2)$$

Entonces si $r_1 = 35$ UA y $r_2 = 50$ UA se obtiene: $M_{TNR} \sim 9M_\oplus$.

La cuestión es si de esta materia se pueden formar conglomerados sólidos del tamaño de cometas (cometesimales). Según los pasos de formación planetaria propuestos por Goldreich y Ward (1973) y las condiciones anteriores de la nebulosa solar, el tamaño límite mayor para un conglomerado de masa está definido por la marea solar. Entonces la masa mayor de un conglomerado será: $m \simeq \sigma R_T^2$, donde $R_T \simeq r(m/M_{Sol})^{1/3}$ es el radio de marea (ver Murray pg. 159). Así,

$$m \simeq \sigma r^2 (m/M_{Sol})^{2/3} = \sigma_0^3 / M_{Sol}^2 = 3 \times 10^{18} gr \quad (3)$$

Este resultado es del mismo orden que los cometas más grandes. Además es solo un valor inicial, ya que los cometesimales estuvieron sujetos a procesos de acreción - fragmentación permitiendo la formación de planetesimales más grandes.

Evolución dinámica del cinturón de cometas: el modelo

La cuestión es como los cometas del cinturón evolucionan para alcanzar órbitas como los SPC. Kuiper (1951) dice que Plutón dispersa primero las órbitas hasta que entran bajo influencia de Neptuno que los dispersa más. Sin embargo, Plutón tiene muy poca masa y por otro lado tiene una inclinación

algo grande y su $w = 90$ o sea que cuando está en el afelio está lejos de la eclíptica.

Entonces queda considerar las interacciones gravitatorias entre los cometas como causa posible de la evolución. Se simularon un gran número de encuentros cercanos entre cometas por medio del Método Monte Carlo.

- Los perihelios y afelios de los cometas interactuantes se tomaron al azar, dentro de un anillo de distancias al Sol r_1 y r_2 .
- Se encuentran en la intersección de las órbitas.
- Se asignó una inclinación de cada par al azar entre 0 y 10 grados.
- Se adoptó una distribución diferencial de masa con una ley de potencia correspondientes a asteroides dada por:

$$n(m)dm = Am^{-\alpha}dm, \quad (4)$$

donde A es cte y $1.5 < \alpha < 2$ (Harris, 1978).

En la simulación se tiene en cuenta la dependencia del número de encuentros cercanos por unidad de tiempo n_c con las masas m_i y m_j de los cometas interactuantes:

$$n_c(m_i, m_j)dm_idm_j = U/V \times n(m_i)n(m_j)S_E(m_i, m_j)dm_idm_j, \quad (5)$$

donde:

U es la velocidad del encuentro

V es el volumen del cinturón que se ha aproximado por un toro centrado en el Sol de radios r_1 y r_2 : $V = \pi^2/4(r_2 - r_1)^2(r_2 + r_1)$.

$S_E(m_i, m_j) = \pi R_E^2$ es la sección de cruce de los encuentros cercanos entre las masas m_i y m_j .

$R_E = K R_c$, donde R_c es el radio de colisión agrandado por enfocamiento gravitatorio dado por:

$$R_c = \eta(m_i^{1/3} + m_j^{1/3})\left(1 + \frac{2G}{U^2\eta^2} \frac{m_i + m_j}{m_i^{1/3} + m_j^{1/3}}\right)^{1/2}, \quad (6)$$

donde $\eta = (4/3\pi\rho)^{-1/3}$ y ρ es la densidad del nucleo cometario que se

adopta igual a $1gr/cm^{-3}$.

Entonces el número total de encuentros cercanos por unidad de tiempo se obtiene integrando la ecuación 5:

$$n_{tot} = \frac{U}{V} \int_{M_{min}}^{M_{max}} n(m_i) dm_i \int_{M_{min}}^{m_i} n(m_j) S_E(m_i, m_j) dm_j \quad (7)$$

donde M_{max} y M_{min} son las masas máxima y mínima dentro de la distribución de masa del cinturón.

Finalmente, la probabilidad $p_c(m_i, m_j) dm_i dm_j$ de que los cometas participantes en un encuentro cercano tengan masas en el rango: $(m_i, m_i + dm_i)$ y $(m_j, m_j + dm_j)$ estará dada por:

$$p_c(m_i, m_j) dm_i dm_j = \frac{n_c(m_i, m_j)}{n_{tot}} dm_i dm_j \quad (8)$$

Entonces, dado un par de órbitas, se calcula la velocidad del encuentro:

$U = V_j - V_i$, donde V_i y V_j son las velocidades orbitales en el punto de encuentro. Luego se les asigna a los cometas masas al azar m_i y m_j según la ley de probabilidad dada por (8).

Si V_G es la velocidad del centro de masa de m_i y m_j en un sistema heliocéntrico, las velocidades orbitales después del encuentro estarán dadas por: $V_G + u_i$ y $V_G + u_j$, donde u_i y u_j son las velocidades relativas al centro de masa. Debido al encuentro cercano, las velocidades respecto al CM no modifican su magnitud pero sí se deflecan según un ángulo dado por (Woolfson, 1978)

$$\tan(\gamma/2) = \frac{G(m_i + m_j)}{DU^2} \quad (9)$$

donde D es el parámetro de encuentro, es la mínima distancia del cometa respecto de la trayectoria no perturbada del otro. Se tomó D al azar para cada encuentro, pero tal que $D < R_E$ y según la función de distribución de probabilidad: $p(D)dD = DdD/R_E^2$. Cuando $D < R_E$ ocurre una colisión y el resultado se elimina del cálculo.

Las velocidades heliocéntricas después del encuentro se calcularon como $V'_i = V_G + u'_i$ y $V'_j = V_G + u'_j$, donde u'_i y u'_j son las velocidades relativas deflectadas. Entonces los nuevos elementos orbitales se calculan de V'_i y V'_j .

Se adoptaron $r_1 = 35$ UA y $r_2 = 50$ UA, una masa total del cinturón de $1 M_\oplus$, $M_{min} = 10^{15}$ gr y M_{max} entre $10^{21} - 10^{26}$ gr. Se usó α entre 1.5 y 1.9 y $K = 20y50$.

Resultados

La fig.1 muestra el número de órbitas cometarias cuyo perihelio o afelio está fuera de los límites del cinturón, debido a los encuentros. Se consideró un periodo de 400 años, calculando el número total de encuentros por la ec. (7) tomando para U el valor medio según el conjunto de encuentros ($\langle U \rangle \simeq 5 \times 10^4 \text{cms}^{-1}$).

Como puede verse la difusión orbital para $M_{max} = 10^{26}$ gr es notable. El nro de cometas cuyo perihelio cruza el límite inferior de 35 UA es 713, lo que da una taza de difusión interna de ~ 1.8 cometas por año. Para masas maximas menores se obtienen valores menores: 0.8, 0.6 y 0.2 para $M_{max} = 10^{25}$, 10^{24} y 10^{23} gr. Para el afelio se obtienen valores algo mayores.

Si suponemos que entre 30 y 35 UA hay una región de transición en estado estacionario, o sea para cada cometa que entra ahí otro es removido debido a las perturbaciones de Neptuno, el nro de cometas que sale del cinturón y cae bajo el control gravitatorio de Neptuno será del mismo orden que las tasas de difusión anteriores. Todos estos resultados corresponden a $K = 50$, para 20 se obtiene resultados cualitativamente similares y cuantitativamente menores en un factor 4 (debido a que quedan fuera del cálculo encuentros más distantes).

Para cometas de masa menor que 10^{20} gr, se calcularon los cambios en perihelio ($\Delta q_i = q_i(\text{final}) - q_i(\text{inicial})$) y afelio luego de cada encuentro cercano. Luego se calcularon los valores medios de los cambios ($\overline{\Delta q}$, $\overline{\Delta Q}$) y las desviaciones standard medias ($\sigma_{\Delta q}$, $\sigma_{\Delta Q}$), para diferentes valores de M_{max} .

Luego se estimó el cambio medio y desviación standard en perihelio y afelio de un cometa con masa menor que 10^{20} gr. durante la edad del sistema

siolar, T mediante $\overline{\Delta q_T} = N_T \overline{\Delta q}$, $\sigma_{\Delta q_T}^2 = N_T \sigma_{\Delta q}^2$ (idem para afelio).

N_T es el número medio de encuentros cercanos de un cometa de masa m durante la edad del sistema solar dado por:

$$N_T(m) = \frac{UT}{V} \int_{M_{min}}^{M_{max}} n(M) S_E(M, m) dM \quad (10)$$

Como el número de encuentros cercanos depende de m , se tomó un promedio de N_T en el rango $10^{15} < m < 10^{20}$ gr. En la fig. 2 se muestran los cambios medios y desviaciones standard como función de M_{max} .

Para $M_{max} = 10^{26}$ se observan valores grandes de los cambio en valores medio y desviaciones, lo que implica una gran dispersión orbital como en la fig. 1. Para $M_{max} = 10^{25}$ la difusión orbital es todavía remarcable. Entonces suponiendo una distribución gaussiana de Δq_T , la fracción de cometas que alcanza $\Delta q_T < -5$ UA luego de 4.5×10^9 años es 0.13 del total. Para masas menores la fracción decrece mucho: 2.5×10^{-3} y 2.5×10^{-6} para $M_{max} = 10^{24}$ y 10^{23} gr. respectivamente.

En la Fig.3 se muestra el número medio de órbitas cometarias N_q que alcanzan perihelios $q < 35$ UA por año como función del exponente α y para cada M_{max} . N_q es fuertemente dependiente de α . Para valores pequeños de α casi toda la masa está concentrada en los miembros grandes, hay pocos pequeños y por tanto N_q es también pequeño. Cuanto mayor es el α , mayor el nro de masas pequeñas y entonces N_q crece.

En las fig 1 y 2 se adoptó un valor medio de $\alpha = 1.75$. Pero podría ser más grande si la población estuviera sujeta sólo a procesos de fragmentación por colisiones (11/6 de Dohnanyi, 1969). Entonces las tasas de difusión calculadas serían mayores.

Se hicieron también simulaciones con mayores inclinaciones con resultados similares.

EN RESUMEN: en un cinturón con las características descritas antes, podemos esperar una tasa de difusión de algunos cometas por año si contiene masas mayores comparables a la luna o de varias decenas si contiene masas comparables con Ceres.

Evolución de los cometas que dejan el cinturón

El proceso dinámico se puede describir como sigue. Una vez que los cometas alcanzan la zona de influencia de Neptuno, puede ser eyectado o inyectado hacia el control del siguiente planeta (Urano). Si las probabilidades

de eyección e inyección hacia el siguiente planeta se dividen en mitad cada una, entonces la probabilidad de un TNO de alcanzar la zona de Neptuno y llegar a ser SP comet es de $(1/2)^4 = 1/16$. Si la tasa de SPC nuevos es de 0.05 por año, entonces la fracción de cometas que entra por año desde el cinturón es de $0.05 \times 16 = 0.8$, suponiendo que es la única fuente de cometas. Esto representa una gran economía de masa, comparado con los 300 cometas por año requeridos en la teoría de captura de la nube de Oort. La nube de Oort recibe nuevos miembros de cometas por perturbaciones de Urano y Neptuno.

Conclusión

- La región de la nebulosa solar entre 35 y 50 UA pudo haber tenido inicialmente una masa sólida inicial de alrededor de $10 M_{\oplus}$.
- Allí se formaron cometesimales de alrededor de 10^{18} gr. por inestabilidad gravitacional.
- La evolución subsecuente de estos cometesimales fue a través de procesos de acreción - fragmentación lo cual determinó una distribución de masa como ley de potencia.
- Si las masas máximas son del orden de la masa de Ceres, la difusión orbital se da lo suficientemente rápido como para proveer la cantidad necesaria de SPC.
- Los cometas cruzarían la región planetaria desde el cinturón hasta la zona interior a Júpiter a través de las perturbaciones planetarias.
- Especulando, es posible suponer que el cinturón experimentó una fuerte reducción desde el principio hasta la actualidad.

Luego de este trabajo pionero, Fernández comenzó una serie de trabajos con W.H. Ip sobre la evolución orbital de planetesimales en la zona de acreción planetaria exterior.

Exploraron la inyección de tales planetesimales de hielo en la nube de Oort y su subsecuente retorno al sistema solar interior como cometas casi parabólicos.

Un resultado de sus modelos numéricos fue la migración hacia afuera de Saturno, Urano y Neptuno, acompañado de la migración hacia adentro de

Júpiter durante la acreción de Urano y Neptuno (Fernandez e Ip, 1984). Este proceso se da por el intercambio de energía orbital y momento angular de los planetesimales dispersados con los planetas.

1.1.2 Letter: Duncan, M, Quinn, T, Tremaine, S. (1988): The origin of short-period comets.

Analizan las características de la distribución de elementos orbitales de los cometas con $P < 200$ años (cometas de corto período, SPC):

- La distribución tiene un fuerte exceso de cometas con $P < 15$ años.
- La mayoría tienen órbitas directas de baja inclinación.
- El argumento del perihelio w tiene picos en 0° y 180°

En este trabajo presentan los resultados de un conjunto de simulaciones numéricas sobre la dispersión de cometas por los planetas gigantes, para determinar si la fuente más probable de SPC es la nube de Oort o el Cinturón de Kuiper (como lo llama en este trabajo).

Método

Siguen la evolución orbital de cometas sujetos a las perturbaciones de los 4 planetas gigantes. Se integra la órbita hasta que el cometa es eyectado o se hace visible desde la Tierra ($q < 1.5$ UA). Pero la evolución desde una órbita que cruza Neptuno hasta un cometa visible tarda millones de órbitas. Entonces como la dispersión gravitatoria es un proceso de difusión, se incrementó la masa de los planetas en un factor μ para acelerar el proceso. Esto cambia la tasa de evolución pero no las propiedades estadísticas finales (lo probaron usando 2 valores de μ). Incluso así las simulaciones tardaron varios meses.

Resultados

Simulación 1: diseñada para chequear la conclusión de Everhart (1972) que los SPC pueden evolucionar de cometas en órbitas parabólicas con distribución de inclinación isotrópica (demuestra esto mediante simulaciones numéricas).

Se tomaron condiciones iniciales como Everhart para comparar: se distribuyeron los perihelios iniciales uniformemente con $4 < q < 6$ UA y se consideró que los cometas eran visibles en $q < 2.5$ UA. Se siguió la evolución de 5000 cometas hasta eyección o visibilidad. Se obtiene que tanto la distribución de semiejes de los SPC visibles y las inclinaciones son inconsistentes con lo observado. En particular las inclinaciones de los cometas visibles es

aprox preservada (o sea isotrópica). Esto no concuerda con lo obtenido por Everhart (1972). La inconsistencia del modelo con la observación conduce a la conclusión de que los SPC no provienen de la dispersión gravitatoria de cometas distribuidos isotrópicamente en órbitas casi parabólicas con q cerca de Júpiter.

Simulación 2: Una propuesta alternativa es que los cometas de la Nube de Oort con perihelios grandes, hasta $q = 30$ UA sean dispersados hacia la zona visible ($q < 1.5$ UA) por una combinación de los planetas gigantes. Para testear esta posibilidad, se examinó la evolución de un conjunto de órbitas con distribución isotrópica de inclinaciones y perihelios uniformemente distribuidos en el rango: $20 < q < 30$ UA. Se obtiene una distribución de semiejes similar a la observada pero la distribución de inclinaciones es inconsistente con la observada, se obtienen aún demasiadas "órbitas retrógradas".

Parece entonces imposible obtener la distribución de cometas observada partiendo de una distribución isotrópica. Por tanto los SPC no provienen de la Nube de Oort.

Simulación 3: Analiza la posibilidad de que los cometas visibles provengan (mayormente) de un cinturón de bajas inclinaciones cerca de Neptuno. Se asume que existe algún mecanismo que perturba los cometas en el cinturón hacia órbitas que cruzan Neptuno y se sigue su evolución bajo la influencia de los planetas gigantes hasta que escapan o se hacen visibles.

Se distribuye i uniformemente en $0^\circ < i < 18^\circ$, el perihelio inicial uniformemente en $20 < q < 30$ UA, y el afelio inicial se fija en 50 UA.

La figura 4 muestra la distribución de a , i , w y Q de los cometas cuando se hacen visibles por primera vez ($q < 1.5$ UA). Se compara con lo observado. Se observa un gran acuerdo. Se observa un pico en $a = 3$ UA para ambas distribuciones y un incremento cerca de Júpiter. La distribución de afelio muestra un gran pico cerca del a de Júpiter. Las distribuciones de inclinaciones son similares, aunque la de la simulación es algo más ancha. La distribución de w ambas muestran un mínimo en $w = 90^\circ$ y $w = 270^\circ$. Cerca del 8% de los SPC visibles de nuestra simulación son retrógrados, en acuerdo con el 3% de la muestra observada y tienden a tener periodos más grandes.

O sea que incluso el Halley pudo haber sido originado en el cinturón.

Discusión

Se usan los resultados de las simulaciones para estimar la masa mínima del reservorio de cometas (entre 35 y 50 UA propuesto por Kuiper y Fernández), requerido para proveer los SPC por la edad del sistema solar. En estas simulaciones la fracción de cruzadores de Neptuno es ~ 0.17 algo mayor que la que estima Fernández (1980) de 0.06. Adoptando una tasa de producción de 0.01 cometas por año (Fernández, 1985) y una masa media por cometa de $10^{17.5}$ gr, se obtiene que se requiere $\sim 0.02M_{\oplus}$ de cometas que cruzan Neptuno como para mantener un flujo estacionario de SPC.

La naturaleza del mecanismo que lleva los cometas a órbitas que cruzan Neptuno no está clara. Un mecanismo es el propuesto por Fernández (1980) que vimos: dispersión gravitatoria por miembros masivos del cinturón.

Otra alternativa es que Neptuno es el único perturbador importante de los cometas del cinturón, y que gradualmente lleva a los cometas del cinturón hacia Urano por la dispersión repetida en periodos de tiempo de varios millones de años.

Chiron, que cuya órbita está entre Saturno y Urano podría ser un miembro de la población de progenitora de SPC. Las simulaciones muestran que no es sorprendente encontrar un cometa ahí.

En síntesis, los SPC no se pueden producir por dispersión de los planetas de cometas de la Nube de Oort. La fuente de SPC más probable es un cinturón que llama Cinturón de Kuiper, conteniendo una fracción de la masa terrestre localizado en las partes externas del sistema solar.

1.2 El descubrimiento

La población transneptuniana permaneció como especulaciones teóricas por varias décadas. Hubieron varios surveys de búsqueda de TNOs con resultados negativos. Charles Kowall realizó una búsqueda sistemática de pequeños cuerpos distantes entre 1976 y 1985. Usó el telescopio de 48 pulgadas del Observatorio de Palomar, cubriendo 6400 grados cuadrados del cielo hasta $m_v = 21$ (Kowal, 1989). Las placas fueron buscadas por blinking. Descubrió varios asteroides y cometas y el primer Centauro Chirón, pero ningún TNO.

En 1987 Jane Luu y David Jewitt realizaron otro survey de búsqueda de objetos distantes, usando los telescopios de 0.6 y 0.9 mts de Cerro Tololo y un telescopio de 1.3 mts del KPNO. La magnitud límite era de $m_R = 24$ y no encontraron ningún objeto lejano.

En 1989 Levison y Duncan realizaron un programa de observación con el telescopio de 1 m de Arizona hasta $m_v = 22$, sin éxito.

Hubieron otros surveys también sin éxito.

Luego de varias búsquedas, en 1992, David Jewitt y Jane Luu descubren el primer TNO, además de Plutón y Charón, 1992QB1, con el telescopio de 2.2 m de Mauna Kea, Hawaii (Jewitt and Luu, 1993). Este objeto tenía en el momento de descubrimiento una distancia heliocéntrica de 41.2 UA y los cálculos de los elementos orbitales daba: $a = 43.82$ UA, $e = 0.08$, $i = 2.21^\circ$, en acuerdo con lo que se esperaba para objetos del cinturón transneptuniano. Tenía una magnitud en el rojo: $m_R = 22.8$, lo cual para un albedo de 0.04 (típico de cometas), correspondería a un diámetro de ~ 250 km. Un cuerpo relativamente grande comparado con el tamaño típico de los asteroides. Unos meses después se descubrió el segundo objeto: 1993 FW, por el mismo equipo. Estos dos objetos fueron seguidos rápidamente por otros llegando a los 500 en 10 años. En la actualidad hay más de 1000. En la Fig. 5 se muestra la tasa de descubrimiento en el tiempo.

1.3 El debate del nombre

Como vimos, la población transneptuniana fue llamada “El Cinturón de Kuiper” por Duncan et al. 1988, cuando aun era un modelo teórico, y el nombre luego se adoptó. Bailey et al. (1990) hacen referencia al trabajo de Edgeworth pero un compatriota de Edgeworth, John McFarland, es el que argumenta fuertemente en favor del reconocimiento del trabajo de Edge-

worth. Dice que el cinturón más allá de la "órbita de Neptuno, debe llamarse "Edgeworth-Kuiper Belt" (McFarland 1996).

Paul Weissman del JPL, en uno de los primeros reviews del cinturón transneptuniano, reflexiona sobre el nombre. Sin embargo, lo llama Cinturón de Kuiper, porque en sus palabras: "este nombre ha estado en uso por varios años, y parecería confuso cambiarlo ahora"

No existe una denominación oficial por la IAU. Es decir que el nombre queda a elección del usuario. En general se adoptará el nombre Cinturón de Edgeworth-Kuiper Belt o Cinturón transneptunianos y objetos transneptunianos (TNO), para los objetos más allá de Neptuno hasta algunos cientos de UA.

1.4 Descubrimiento y designación de nombres de cuerpos menores y en particular los Objetos Trans Neptunianos (TNOs).

La División III (Planetary Systems Sciences) de la IAU, funciona con Comisiones, grupos de trabajo y grupos de trabajo inter divisiones. En particular existe una Comisión que se encarga de la nomenclatura de los cuerpos pequeños integrado por unos 20 miembros entre los que está Julio Fernandez y Daniela Lazzaro. Aclaran que no venden nombres. Tiene la responsabilidad de asignar nombres con la autoridad de la IAU. La asignación de nombres está administrada por el MPC y el CBAT (Center Bureau for Astronomical Telegrams) bajo el guiado del comité.

El Minor Planet Center MPC opera en el Observatorio Astrofísico Smithsonian (Cambridge, EEUU). con el auspicio de la División III (Planetary Systems Sciences) de la IAU. Es responsable de la designación de nombres de cuerpos pequeños del Sistema Solar, Cometas y satélites naturales. También es responsable del cálculo, chequeo y diseminación de las observaciones astrométricas y órbitas mediante las Circulares de pequeños cuerpos, el Minor Planet Circulars Orbit Supplement (MPO) (issued three to twelve times per year), the Minor Planet Circulars Supplement (MPS) (issued three or four times a month) and the Minor Planet Electronic Circulars (issued as necessary, generally at least once per day).

Nombres de pequeños cuerpos.

- Designación provisoria: se les da cuando se descubren y son confirmados. Esta designación está basada en la fecha de descubrimiento a través de la siguiente fórmula:

4 dígitos que indican el año, un espacio, una letra que indica la quincena del mes (A del 1 al 15 de enero, B del 16 al 31 de enero, etc.) otra letra que indica el orden dentro de la quincena. Si hay más de 25 descubrimientos en una quincena, se comienza de nuevo con la secuencia de la segunda letra (A,B,C,...) y se le agrega un 1. Si hay más de 50 entonces se le agrega un 2, etc.

- Designación permanente: Cuando la órbita está bien determinada, o sea que se puede predecir su posición en el futuro, el objeto recibe un número permanente (en general secuencialmente por el MPC) y se puede elegir un nombre.
- Nombre: Cuando un asteroide recibe una designación permanente se invita al descubridor del asteroide a sugerir un nombre. Los nombres deben ser aprobados por la comisión de nomenclatura de pequeños cuerpos.

1.5 Estructura general de la región transneptuniana.

El estudio de la estructura dinámica del Cinturón transneptuniano comenzó antes de que se descubriera ningún cuerpo (salvo Plutón y Charón). Se realizaron varios experimentos numéricos para analizar la estabilidad en la zona. Según las características dinámicas de la zona, se pueden distinguir en principio tres poblaciones:

- Objetos clásicos: con $\sim 41 < a < \sim 48$ con baja excentricidad ($e < 0.2$) e inclinación. Esta población se la suele dividir en clásica cold y hot según la inclinación.
- Objetos resonantes: están en resonancia de movimientos medios con Neptuno. La más poblada es la 3:2 donde está Plutón y los plutinos. También hay objetos en la 1:2 ($a \sim 47.6$) y otras.
- Objetos del Disco extendido (SDOs): con gran excentricidad ($e > 0.2$), semiejes grandes y en gral $30 < q$ UA. Se dividen en SDO cercanos

y Objetos del Disco extendido ($q > \sim 38039$). Tienen inclinaciones de hasta 40 grados.

En la figura 6 se pueden distinguir estas poblaciones.

1.6 Datos observacionales.

Las observaciones y los elementos orbitales de los TNOs se pueden obtener como la de todos los pequeños cuerpos, del MPC. En esta base de datos, hay dos listas:

Los Centauros, que da los elementos de los Centauros y los SDOs. Aquí los SDOs son considerados con $a > 50UA$ Los TNOs que lista los TNOs excepto los SDOs. Tienen todos a entre plutinos y 50 UA.

1.7 Propiedades físicas de los objetos menores del Sistema Solar.

Para un objeto en general se define:

Albedo (p): Es la relación, expresada en porcentaje, de la radiación que cualquier superficie refleja sobre la radiación que incide sobre la misma. Las superficies claras tienen valores de albedo superior a las oscuras, y las brillantes más que las mates. Es una medida de la tendencia de una superficie a reflejar radiación incidente.

Para objetos del Sistema Solar se define el

Albedo geométrico (visual: p_v): al porcentaje de la radiación reflejada por el objeto si el ángulo de fase es igual a cero. El **ángulo de fase (α)** es el ángulo medido desde el objeto entre este y el Sol y entre este y la Tierra.

La función de fase ($\Phi(\alpha)$): es la fracción de luz dispersada en un ángulo de fase α respecto de la dispersada en un ángulo de fase $\alpha = 0$.

Apuntes de magnitudes en el Sistema Solar.

1.8 Relación entre la distribución de tamaños y de magnitudes

Se llama *función de luminosidad acumulada* a la ley de distribución acumulada de magnitudes absolutas para objetos del sistema solar. En general la

forma normalizada tiene la forma:

$$N(< H) = 10^{\alpha(H-H_0)} \quad (11)$$

donde α es la pendiente logarítmica de la distribución y H_0 es la magnitud absoluta para la cual la densidad (o el número) de objetos más brillantes que H_0 , $N(< H_0) = 1$.

La distribución diferencial de magnitudes se obtiene derivando la ecuación anterior:

$$dN/dH = \alpha \ln(10) 10^{\alpha(H-H_0)} \quad (12)$$

Según la fórmula 12 del apunte sobre magnitudes, la relación entre la magnitud absoluta y el radio de objetos con el mismo albedo está dada por:

$$H = cte - 5 \log(R) \quad (13)$$

De esta relación se pueden obtener las leyes de distribución de tamaños: La distribución diferencial de tamaños:

$$dN/dR = CR^{-q}, \quad (14)$$

donde $q = 5\alpha + 1$.

Y la ley de distribución acumulada, integrando la diferencial:

$$N(> R) = C_1 R^{-q+1} \quad (15)$$

1.9 Características físicas generales de los TNOs.

Existe un buen conjunto de datos fotométricos en el visible e IR cercano de varios TNOs y Centauros. Las observaciones se han hecho en los filtros BVRI-JHK y han permitido tener las características de estas poblaciones. Se han observado características de absorción correspondiente a hielo de agua, sin embargo se cree que estos espectros estarían afectados por los rayos cósmicos que alteran químicamente la superficie. También se han observado mezclas de carbón y olivina.

No se han encontrado correlaciones entre el color y el semieje mayor de los TNOs en contraste con los asteroides. Los colores van desde casi neutro ($V - R \approx 0.3$) hasta muy rojos ($V - R \approx 0.7 - 0.8$). En particular los

colores de los TNOs clásicos y resonantes son indistinguibles. Se piensa que el material muy rojo de los TNOs y Centauros se debe a la exposición prolongada a los rayos cósmicos que forman complejos carbonosos.

Hay muy pocos albedos determinados de TNOs, y en general son más altos que los de las cometas. Aunque esto puede ser debido al tamaño y no a una composición diferente. Por ej. Plutón y Charon tienen albedos bastante altos (0.44 - 0.61 y 0.38) lo que se debe en parte a la capacidad de retener sus gases en una atmósfera, que luego se condensan en la superficie en una fina capa congelada de albedo alto.

Todavía hay demasiadas pocas medidas fotométricas de TNOs para determinar períodos de rotación y amplitudes de curvas de luz. Aunque hay algunos trabajos. Particularmente se han descubierto varios TNOs binarios midiendo las variaciones en las curvas de luz.

Hay un trabajo en prensa, Rabinowitz, 2006 de observaciones fotométricas de 18 TNOs. (Ver)

1.10 Origen y formación de la región transneptuniana.

1.10.1 Masa de la región transneptuniana

Bernstein et al (2004) recopilan datos de surveys publicados además de su survey con el HST para calcular la densidad acumulativa de EKBO en el cielo versus la magnitud en el rojo (función de luminosidad). La función de luminosidad es equivalente a la distribución de tamaños. La distribución diferencial de tamaños tiene la forma:

$$dN \propto R^{-q}dR \quad (16)$$

donde N = nro de objetos con radios entre R y $R+dr$ y q es el exponente a determinar. Dividen la población en clásica y excitada. Integrando la función de luminosidad calculan la masa total de la población clásica en $M_{CEKBO} \simeq 0.005M_{\oplus}$. La población excitada es más complicada de calcular y estiman (como orden de magnitud) que puede ser un orden de magnitud más que la clásica, es decir: $M_{EEKBO} \simeq 0.05M_{\oplus}$ y que podría llegar a $\sim 0.15M_{\oplus}$.

En cuanto a los objetos con perihelios grandes, como Sedna, estiman que podían contener entre 0.1 y $0.3M_{\oplus}$.

También se estima la masa de los Troyanos de Neptuno del orden de la masa en el cinturón clásico.

1.10.2 Coagulación

De la sección anterior: la masa del EKB actual estaría entre $0.05 - 0.3M_{\oplus}$, muy por debajo de lo que se piensa para que los EKBO se hayan formado por coagulación.

Kenyon and Luu, (1998, 1999) y Kenyon (2002), en una serie de simulaciones encuentran que se requiere entre 3 a $30 M_{\oplus}$ de sólidos primordiales en un anillo entre 32 y 38 UA para formar por acreción al menos 1 objeto del tamaño de Plutón y $\sim 10^5$ objetos de $R > 50$ km. La densidad superficial inicial requerida ($\sigma \sim 0.06 - 0.6 \text{grcm}^{-2}$) es del orden de la porción condensada de la MMSN a 35 UA ($\sigma_{MMSN} \sim 0.02 \text{grcm}^{-2}$)

1.10.3 El problema de la masa perdida

El hecho de que la masa actual y la primordial difieran en 2 órdenes de magnitud se denomina el “problema de la masa perdida”.

Las simulaciones mencionadas antes proponen como solución que solo el $1 - 2\%$ de la masa primordial se acrete en objetos de tamaño mayor a ~ 100 km. El resto, estaría en objetos del tamaño de los cometas entre ~ 0.1 y 10 km. El truco en la acreción se atribuye a la formación de varios Plutones cuya gravedad amplificaría las velocidades de dispersión de manera que las colisiones entre planetesimales son erosivas en vez de acretantes. Por lo tanto la acreción en el EKB podría ser auto limitante. (Kenyon and Luu, 1999).

El tema del problema de la masa perdida requiere sin embargo más desarrollo. En primer lugar, se debe tener en cuenta como la formación de Neptuno y posiblemente otros cuerpos de tamaño de planetas pudo haber influenciado la coagulación de los EKBOs. Es más, hay que tener en cuenta como la inclusión de los planetas gigantes y la subsecuente formación de Neptuno cambian nuestra comprensión del problema de la pérdida de masa. Por otro lado, cómo hace el sistema solar exterior para perder el 99% de su masa primordial de sólidos?

El problema de la masa perdida se traduce en un problema de “limpieza” y su solución involucra alguna combinación, todavía desconocida de

- pulverización colisional

- transporte difusivo por solisiones entre partículas
- eyección gravitatoria por planetas
- remoción por fricción gaseosa y/o drag por radiación
- ... ? ...

El otro tema respecto de la masa es el límite externo del disco primordial. A qué distancia del Sol se coagularon los planetesimales? El límite externo del disco clásico (a ~ 47 UA) sugeriría que los planetesimales no se forman más allá de esta distancia. En los discos extrasolares se observa un límite bien definido. Por ej. en β Pictoris y AU Microscopii las pendientes de los perfiles de brillo superficial muestran cambios claros en 100 UA y 43 UA respectivamente. Pero no se puede predecir con certeza como se trunca el disco de planetesimales.

El estudio de estos temas y la explicación de las incógnitas que se plantean es lo que lleva a los modelos de formación y origen de la región transneptuniana.

1.11 Objetos transneptunianos binarios.

Hasta el presente existen 48 sistemas binarios o múltiples en la TNR (Noll, et al. 2007). Las teorías de formación involucran la interacción entre 2 o más cuerpos en las etapas finales de la formación del Sistema Solar.

Existe una mayoría de binarios cuyas componentes tienen tamaños similares y esto parece ser consistente con los modelos de formación existentes. Por otro lado existen satélites pequeños de TNOs como los nuevos satélites de Plutón, Eris y Haumea, los cuales parecen haberse formado por colisiones.

Se los detecta directamente en la imagen, se mide la separación angular y la diferencia de magnitud.

1.12 Evolución dinámica y contribución a otras poblaciones del Sistema Solar.

Como vimos el TNB es una fuente probable de los JFcs y Centauros. Los Plutinos pueden alcanzar Neptuno luego de ser desacoplados de la resonancia

3:2 o del SD. Existen trabajos que muestran como es la evolución posterior de estos objetos. Una fracción de estos objetos entra en la región planetaria pero la mayoría es dispersada hacia la nube de Oort. Luego veremos en más detalle estos trabajos.

Bibliografía:

Duncan, M., Quinn, T., Tremaine, S. (1988): The origin of short-period comets

Chiang, E., Y. Lithwick, R. Murray-Clay, M. Buie, W. Grundy, and M. Holman. 2006. A Brief History of Trans-Neptunian Space. In *Protostars and Planets V*. B. Reipurth, D. Jewitt, and K. Keil (Eds.), Univ. of Arizona Press, Tucson. pp 895-911.

Davies, J.K., McFarland, J. Bailey, M. E., Mrsden, B.G. and Ip, W. The early development of ideas concerning the transneptunian region. In *The Solar System Beyond Neptune*. A Barucci et al. (Eds.), Univ. of Arizona Press, Tucson. pp 11-23.

Edgeworth, K.E. The origin and evolution of the Solar System. *MNRAS* **109**, 600-609.

Fernández, J. A., 1980. On the existence of a comet belt beyond Neptune.

Fernández, J. A., 2005, *Comets. Nature, Dynamics, Origin, and their Cosmogonical Relevance*.

Kuiper, G. P. 1950. On the origin of the Solar System *Proceedings of the National academy of sciences* **37**, 1-14.

Whipple F. L. (1950a) On tests of the icy conglomerate model for comets. *Astron. J.*, **55**, 83.

Whipple F. L. (1950b) A comet model. I. The acceleration of Comet Encke. *Astrophys. J.*, **111**, 375-394.

Whipple F. L. (1964a) The History of the Solar System. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Volume 52, Issue 2, pp. 565-594, 1964.

Whipple F. L. (1964b) Evidence for a Comet Belt beyond Neptune. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*,

Volume 51, Issue 5, pp. 711-718.

Página del MPC: <http://cfa-www.harvard.edu/iau/mpc.html> y de la IAU:
<http://www.iau.org/>

Figure 1:

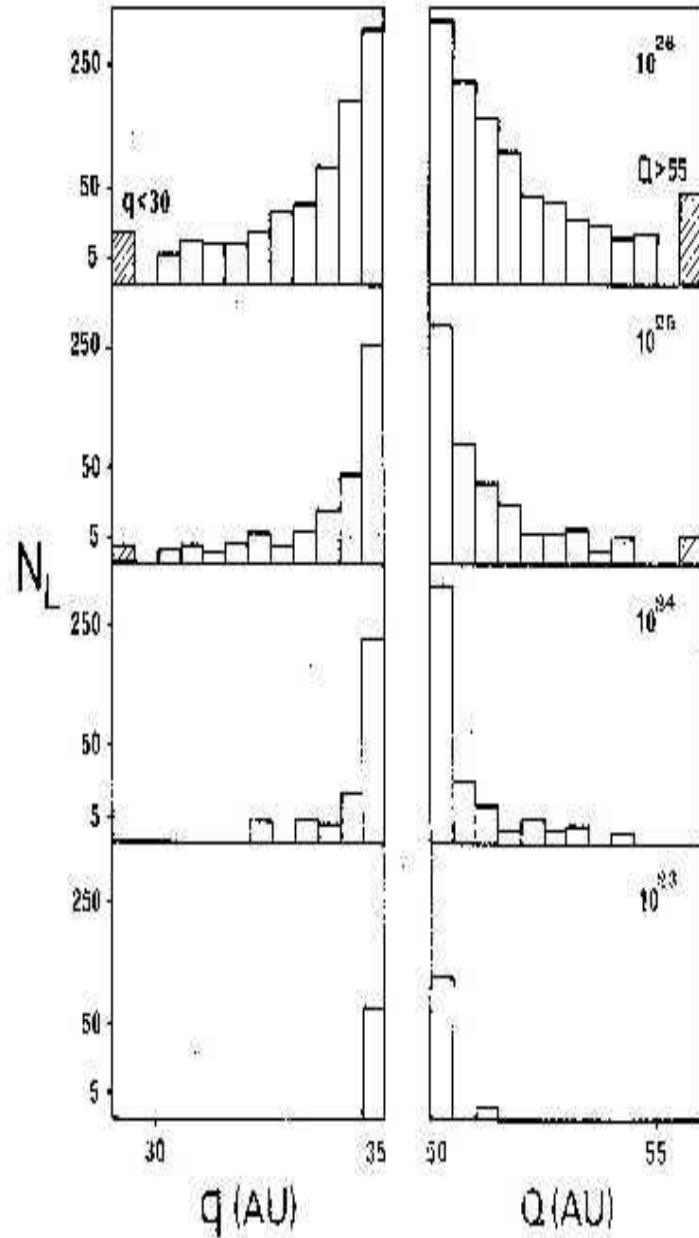


Figure 1. Histograms showing the number of comets N_L whose perihelia or aphelia lie outside the limits assigned to the belt (35–50 AU) because of close encounters. The comets have been grouped into intervals of 0,5 AU. The time period considered is 400 yr. The four cases correspond to values of maximum masses M_{max} (g) appearing at the upper right of each picture. The other parameters have values $K = 50$ and $\alpha = 1.75$.

Figure 2:

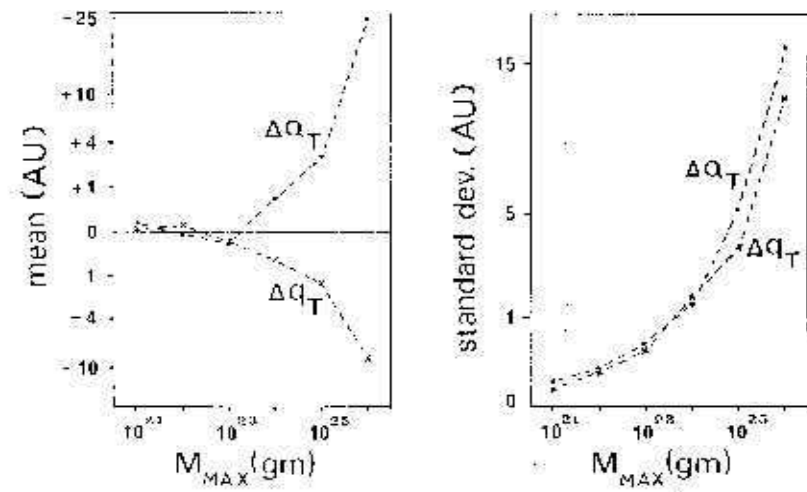


Figure 2. Mean and standard deviation of the perihelion and aphelion changes Δq_T and ΔQ_T of a belt comet, due to close encounters through all the solar system life, as a function of the maximum mass M_{MAX} .

Figure 3:

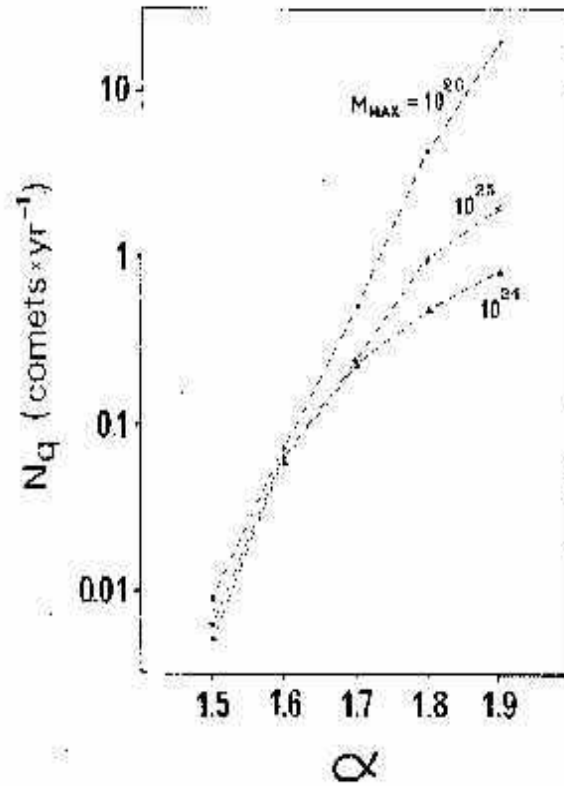


Figure 3. Mean number of comets per year N_q whose orbits attain perihelia $q < 35$ AU as a function of the exponent α of the mass distribution.

Figure 4:

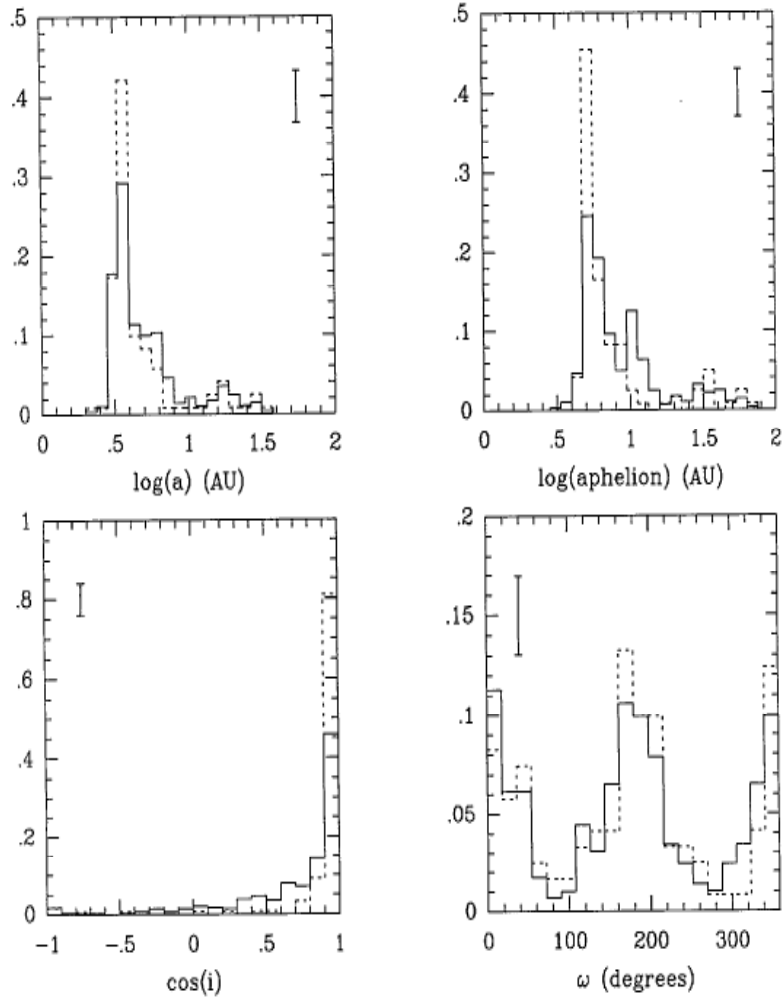


FIG. 2.—The solid histograms show the distributions of semimajor axis a , inclination i , argument of perihelion ω , and aphelion for comets that evolve to SP orbits with $q < 1.5$ AU in our simulations. The initial inclinations are uniformly distributed in $\cos(i)$ for i between 0° and 18° , the initial perihelia are uniformly distributed between 20 and 30 AU, and the initial semimajor axis is $a = 50$ AU. The dashed histograms show the distributions in the same four orbital elements for the comets in Marsden's (1983) catalog. Some typical statistical error bars are plotted. The histograms are based on 281 simulated comets and 121 observed comets.

Figure 5:

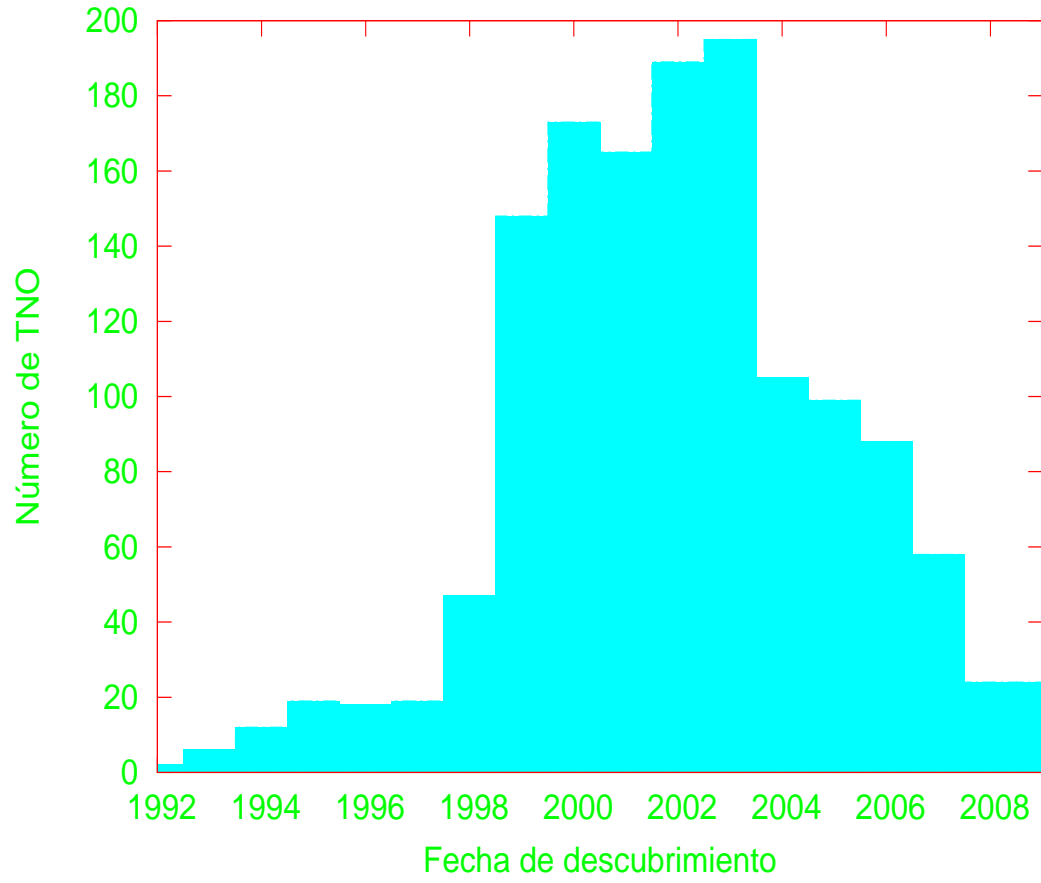


Figure 6:

